



POLITECNICO
MILANO 1863

Tomografia SAR in area urbana

Problemi inversi applicati al telerilevamento

A.A. 2024-25

Gadda Alessia

Gramignano Matteo

Messina Giorgio

Vitello Gaetano

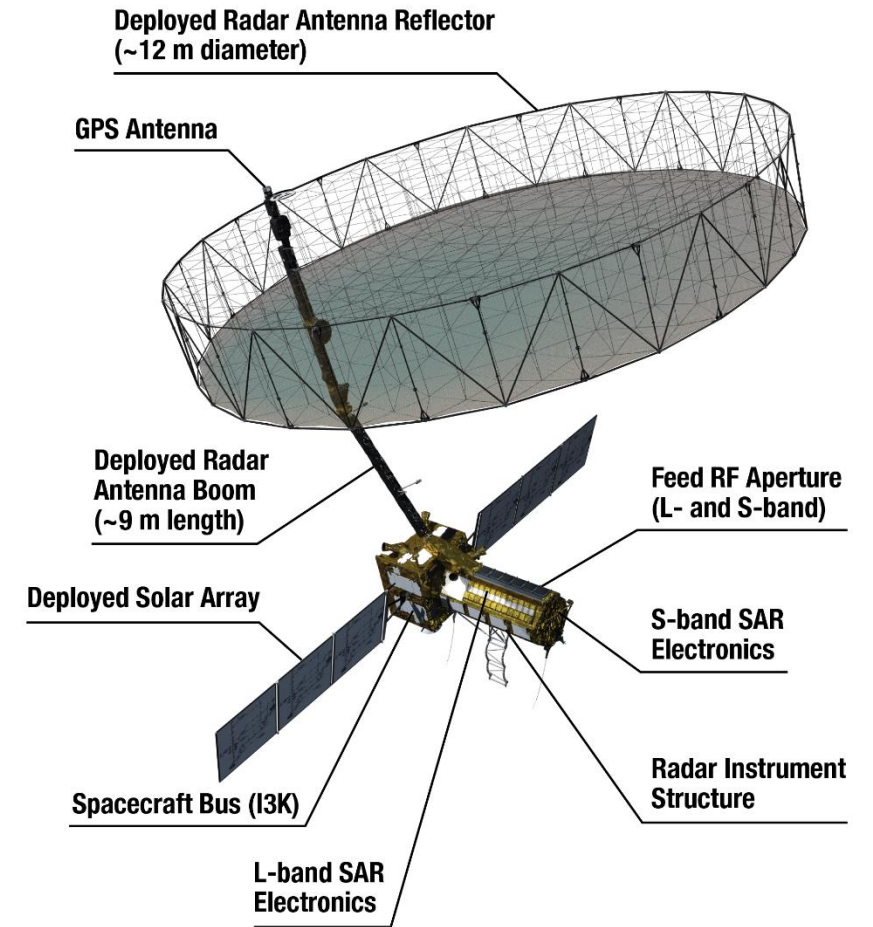
SAR (Synthetic Aperture Radar)

Tecnologia radar utilizzata per generare immagini ad alta risoluzione della superficie terrestre e di altri oggetti.

Sfrutta il movimento della piattaforma (es. un satellite o un aereo) per simulare un'apertura di antenna più ampia di quella fisica.

Funzionamento:

- Il SAR trasmette un segnale;
- Riceve il segnale riflesso dagli oggetti (bersagli);
- Registra il valore di riflettività del bersaglio;
- Ripete le precedenti operazioni con diverse angolazioni.



SAR (Synthetic Aperture Radar)

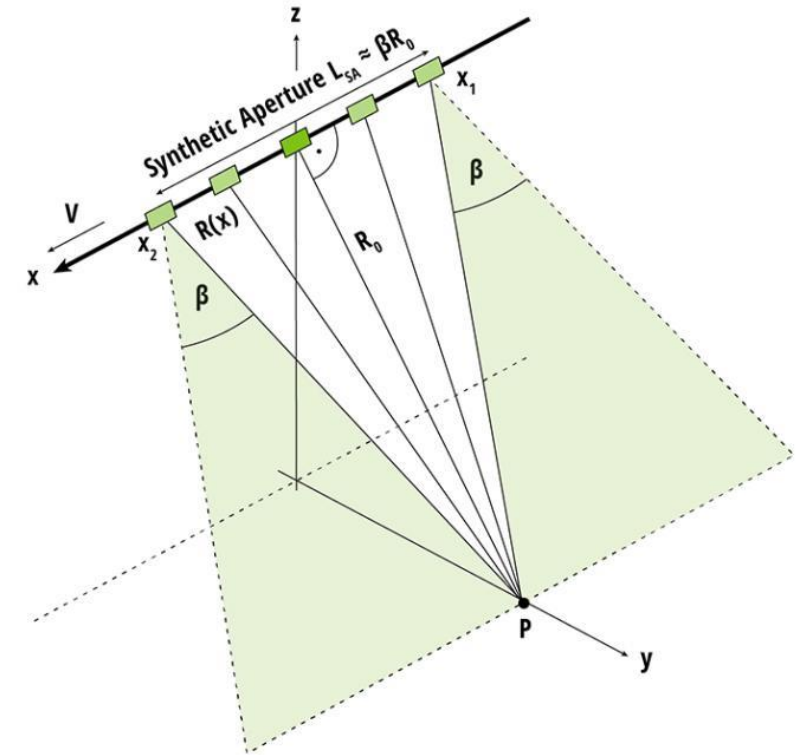
Equazione del segnale ricevuto

Un segnale radar riflesso può essere descritto come:

$$s_R(t) = \alpha \cdot s_T(t - \tau) = \alpha \cdot s_T\left(t - \frac{2R}{c}\right)$$

con:

- α coefficiente complesso (attenuazione e fase introdotta dal bersaglio);
- $\tau = \frac{2R}{c} \text{RTT}$;
- $s_T(t)$ è un impulso modulato linearmente in frequenza (chirp).



Riflettività

È la misura di quanto un bersaglio riflette l'energia elettromagnetica ricevuta dal radar nella direzione del radar stesso.

$$\gamma = \sum_{n=1}^N I_n e^{-jk_z^n z}$$

dove:

- N è il numero di osservazioni (dimensioni baseline);
- I_n è il segnale SAR acquisito al passaggio n-esimo (include ampiezza e fase del ritorno radar);
- k_z^n è il numero d'onda verticale per il passaggio n-esimo (dipende dalla baseline);
- z è la quota verticale.



SAR (Synthetic Aperture Radar)

Applicazioni della tomografia SAR

Monitoraggio urbano:

- Separazione di *scatterer* multipli nello stesso pixel (es. tetto, strada, facciata);
- Deformazioni strutturali (es. ponti o viadotti).

Studio della vegetazione:

- Densità e altezza media (es. degli alberi);
- Cambiamenti dovuti a disboscamento o crescita vegetativa.

Strutture interrate o sopraelevate:

- Es. metropolitane o tunnel in aree urbane;
- Distinzione di strati del terreno sotto il manto stradale.










Attività di progetto

Obiettivi:

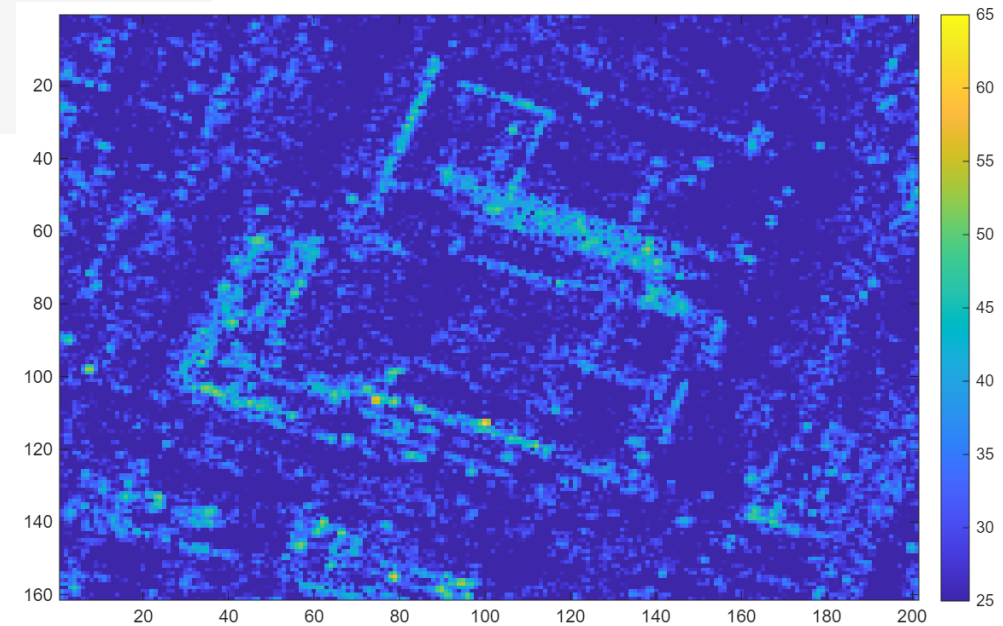
- Ricostruzione del profilo verticale di un'area urbana
 - Approccio Least Square (basato su SVD troncata)
 - Approccio in norma L_p (basato su IRLS)
 - Generazione dei tomogrammi 3D (geometria SAR vs. geometria reale)
- Valutazione dei risultati con aggiunta di rumore (gaussiano)



Parametri iniziali

Name	Value	Size	Class
 baseline	<i>29×1 double</i>	29×1	double
 data	<i>500×700×29 complex double</i>	500×700×29	complex double
 date	<i>29×8 char</i>	29×8	char
 jj	<i>29×1 double</i>	29×1	double
 lambda	0.0312	1×1	double
 r0	7.4306e+05	1×1	double
 teta	0.5939	1×1	double

- **baseline:** posizioni del SAR [m];
- **data:** stack di 29 immagini SAR 2D con risoluzione 500x700;
- **lambda:** lunghezza d'onda del radar [m];
- **r0:** range di riferimento [m];
- **theta:** elevazione SAR rispetto alla verticale [rad].



Dati iniziali – Basilica Papale di San Paolo Fuori le Mura

SVD (Singular Value Decomposition)

- Valutazione **empirica** del **rango** effettivo della matrice di proiezione **G** e della sua condizione numerica (stabilità della ricostruzione):
 - Filtraggio/troncamento di valori singolari piccoli per ridurre l'effetto del **rumore** e migliorare la qualità della **stima**;
- Passaggio da soluzione **LS** (Least Squares) a **IRLS** (Iteratively Reweighted Least Squares) per ottenere stime più robuste e potenzialmente più sparse, adattando il modello ai dati reali.



LS (Least Squares)

- Ricerca della soluzione a norma minima:

$$\min_x ||x||_2^2, \quad \text{per cui} \quad Gx = d \quad (\text{problema sottodeterminato})$$

- x rappresenta la **riflettività** del pixel lungo la dimensione verticale;
- La **matrice G** descrive la geometria e il modello d'acquisizione multi-baseline del radar;
- LS assume errori gaussiani e uniformi, ma può essere sensibile a rumore e outlier presenti nei dati reali;
- Soluzione con SVD $\rightarrow x_{LS} = VS^{-1}U^Hy$



Soluzione in norma L_p

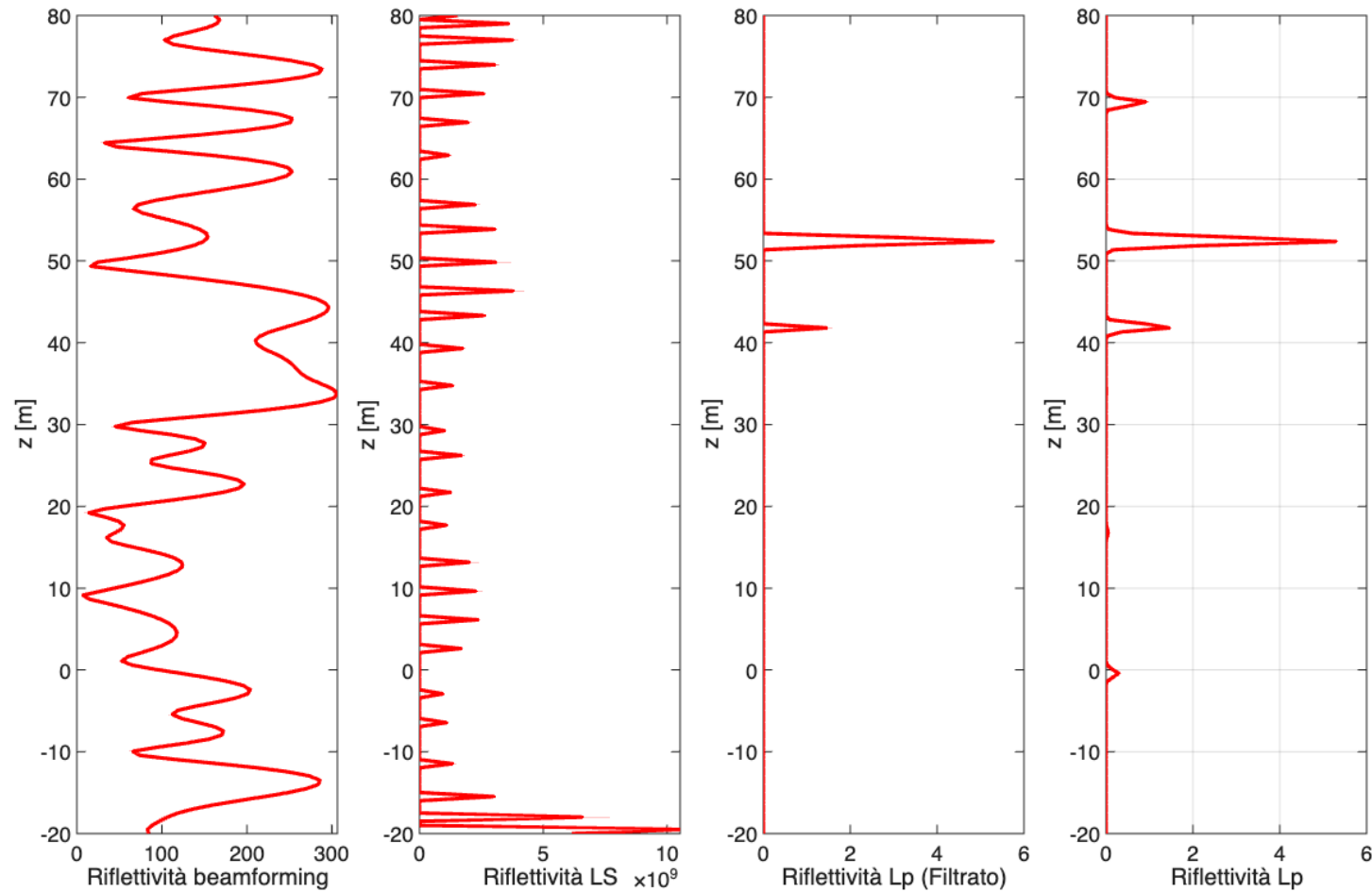
- Risoluzione di problemi di **minimizzazione** nella norma L_p :

$$\min_x ||x||_p^p = \min_x (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{con } 1 \leq p < 2$$

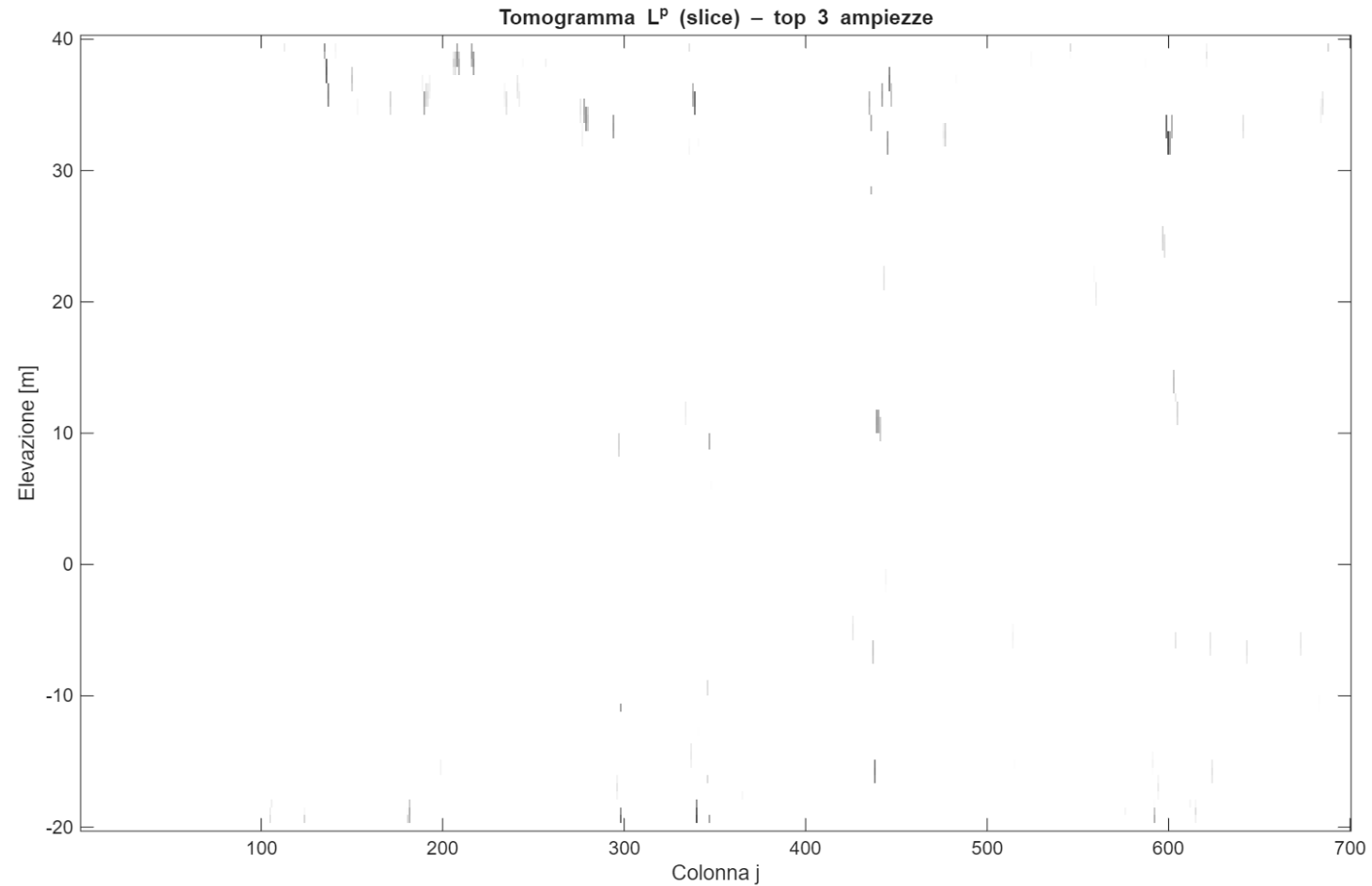
- Approssimazione della soluzione **risolvendo iterativamente** problemi LS pesati, aggiornando i pesi in base ai residui dell'iterazione precedente;
- Nel contesto **TomoSAR**, usare norma L_p con $p < 2$ aiuta a migliorare la robustezza contro outlier e rumore impulsivo, comuni nei dati radar;
- Scelta ottimale: $p \approx 1$ (approccio robusto e vicino alla norma L_1 , che favorisce la sparsità).



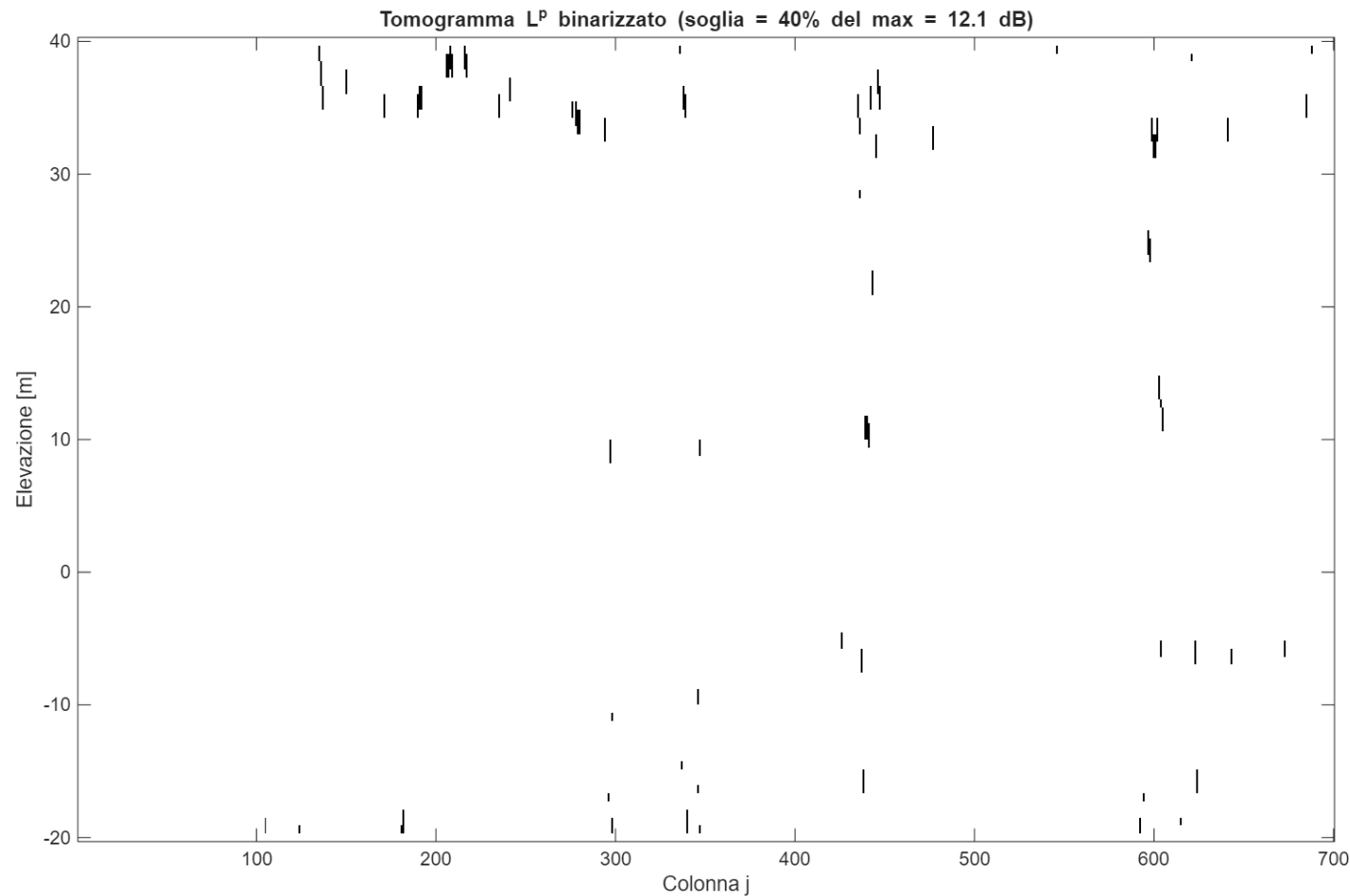
Profilo verticale della riflettività (sul singolo pixel)



Tomogramma 2D (intera slice) – non binarizzato



Tomogramma 2D (intera slice) - Binarizzato



Codice utilizzato per la binarizzazione:

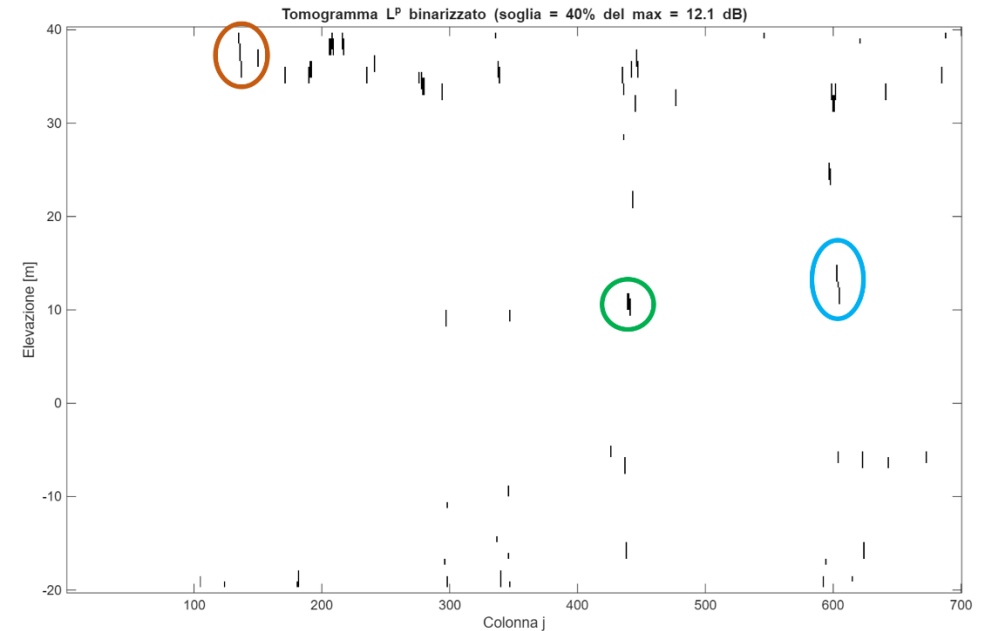
```
% --- Percentuale di soglia (0-100%) ---  
pct = 40;
```

```
tom_lp_db = db(tom_Lp);           % conversione in dB  
max_db    = max(tom_lp_db(:));    % massimo in dB  
th_db     = pct/100 * max_db;     % soglia in dB  
BW        = tom_lp_db > th_db;    % binarizzazione
```

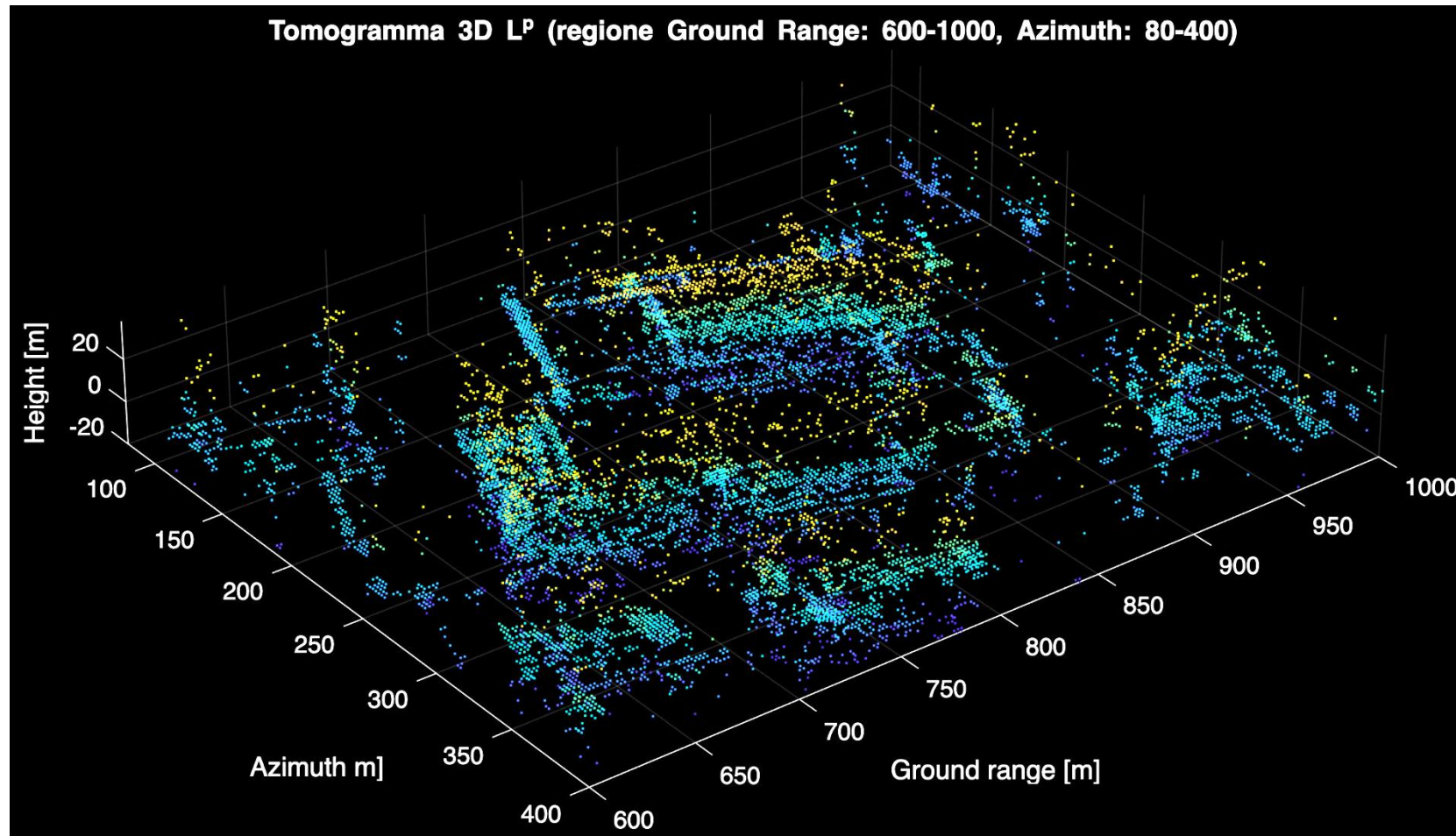
```
% --- Visualizzazione ---  
figure;  
imagesc(j_range, z_axis, BW);  
colormap(gray(2));
```

Effetto Layover

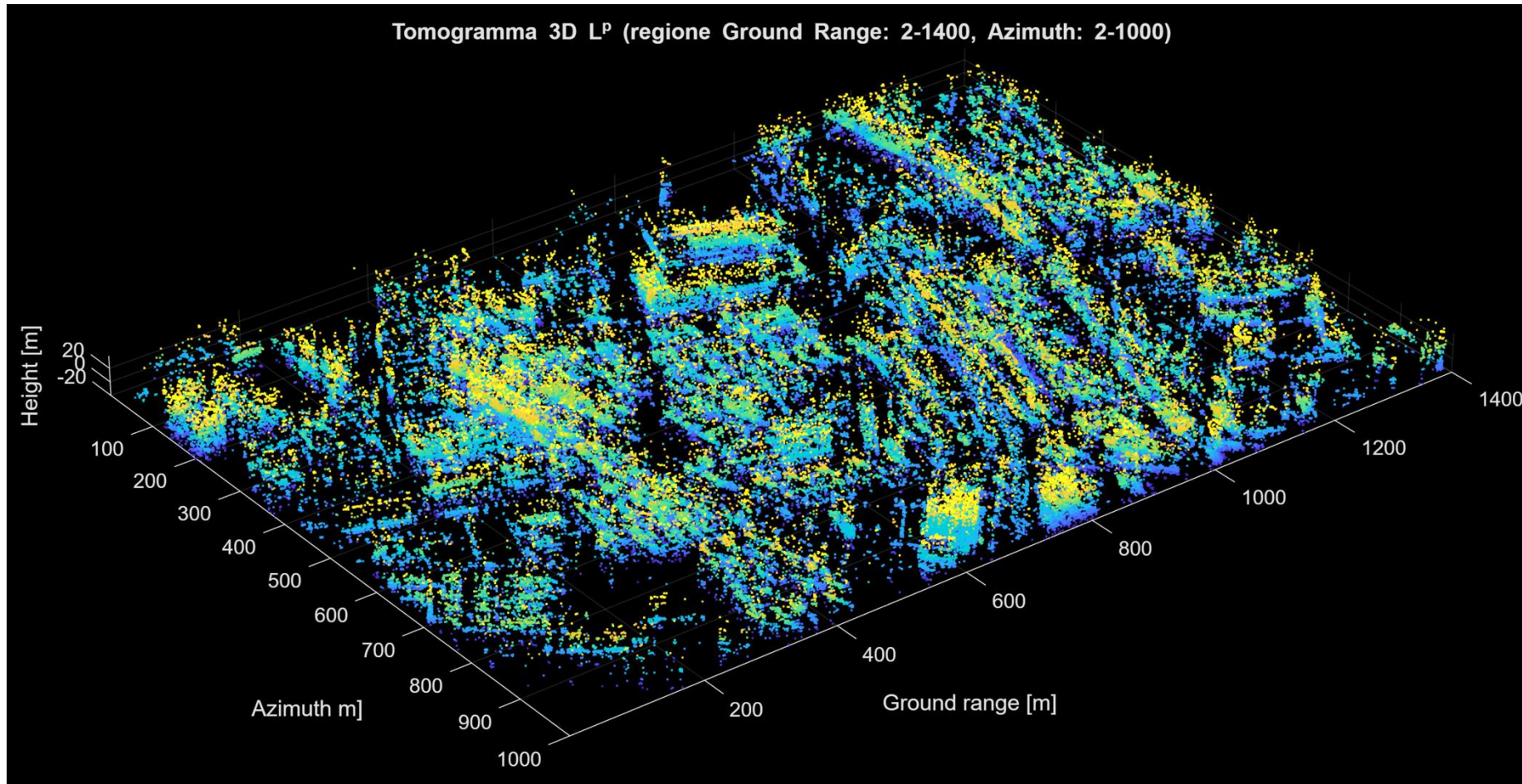
- Distorsione geometrica che si verifica quando il radar vede superfici inclinate molto ripide rispetto alla direzione di osservazione;
- Nel SAR, ciò comporta che punti con altezze diverse appaiano proiettati nello stesso pixel di immagine, rendendo difficile distinguere le diverse altezze reali;
- Layover comune in ambiente urbano o montuoso, e in generale con superfici verticali.



Tomogramma 3D – solo Basilica



Tomogramma 3D – Intera mappa



Approccio teorico

- Assunzione: introduzione di rumore gaussiano tramite funzione `randn`, a partire da specifici valori di SNR desiderati
 1. Valori SNR scelti: -15 dB, -5 dB, 0 dB, 5 dB, 15 dB;
 2. $d_{noise} = d_{ideal} + noise$, dove $noise \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 = P_{noise} = P_{data} - SNR)$
- Visualizzazione dei picchi di riflettività (L2 e Lp) e confronto tra dato ideale e dato rumoroso

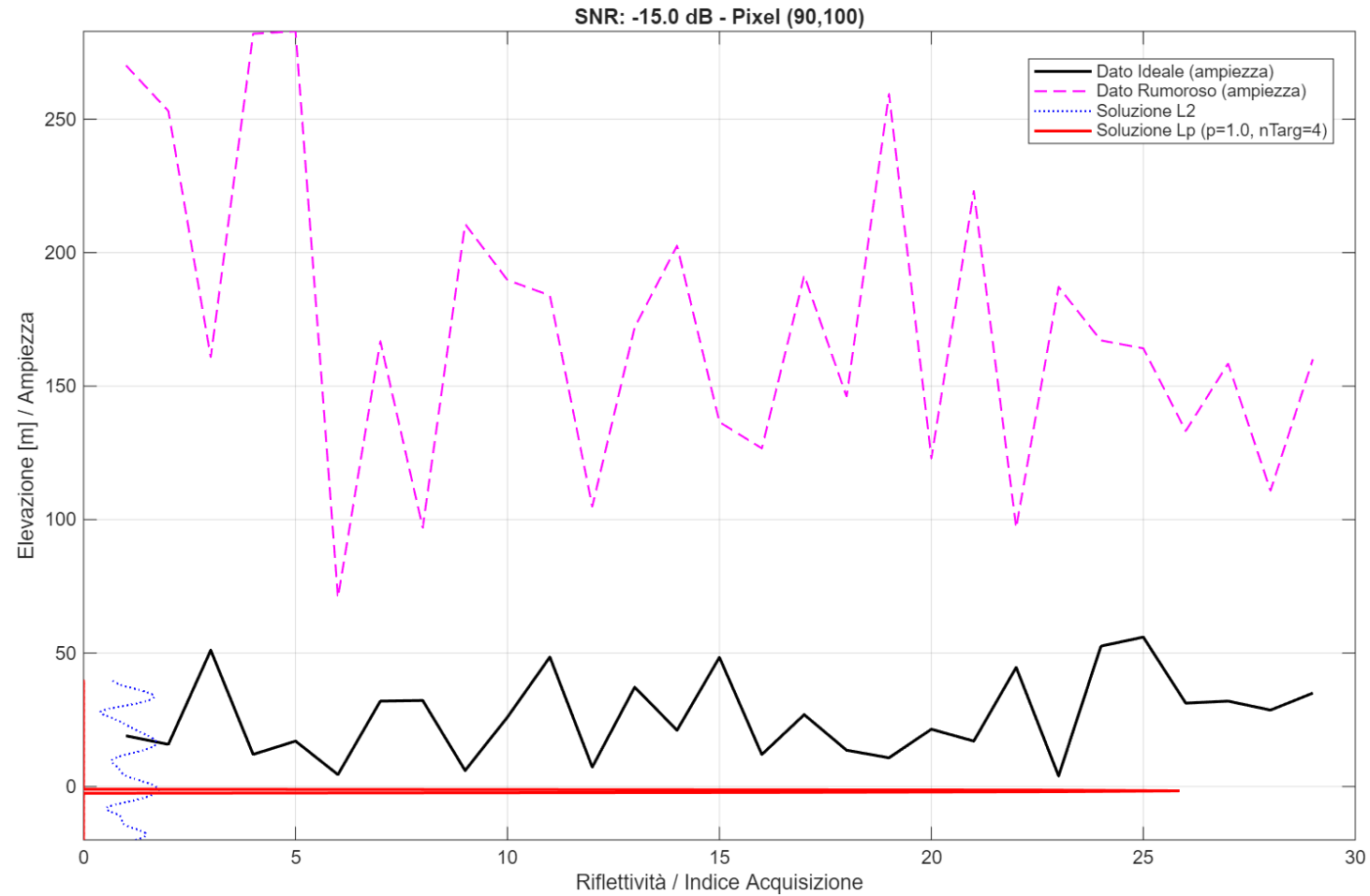
Analisi

- Distinguibilità dei picchi di riflettività al variare dell'SNR



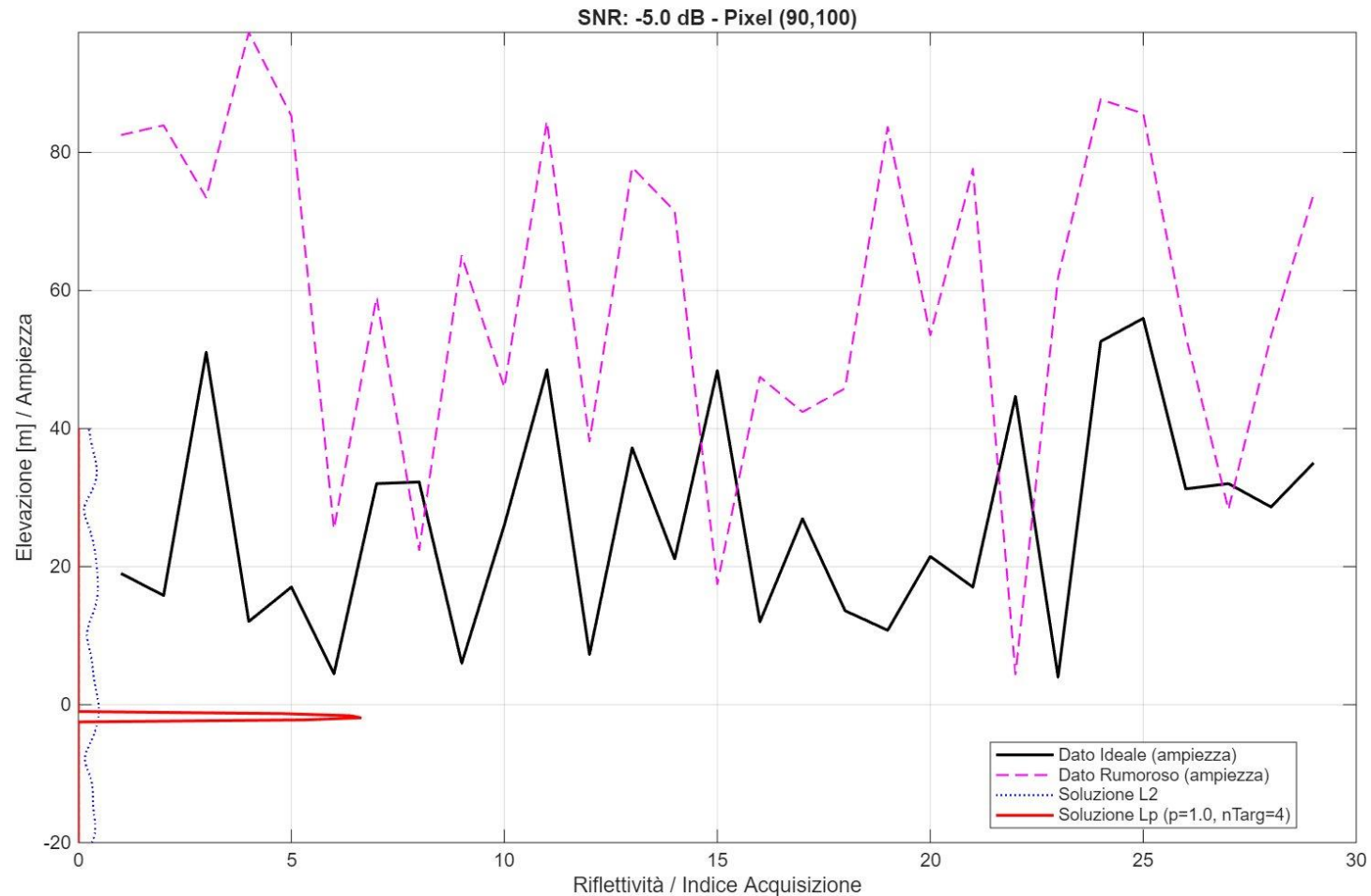
Valutazione dei risultati con aggiunta di rumore

Singolo pixel: -15 dB



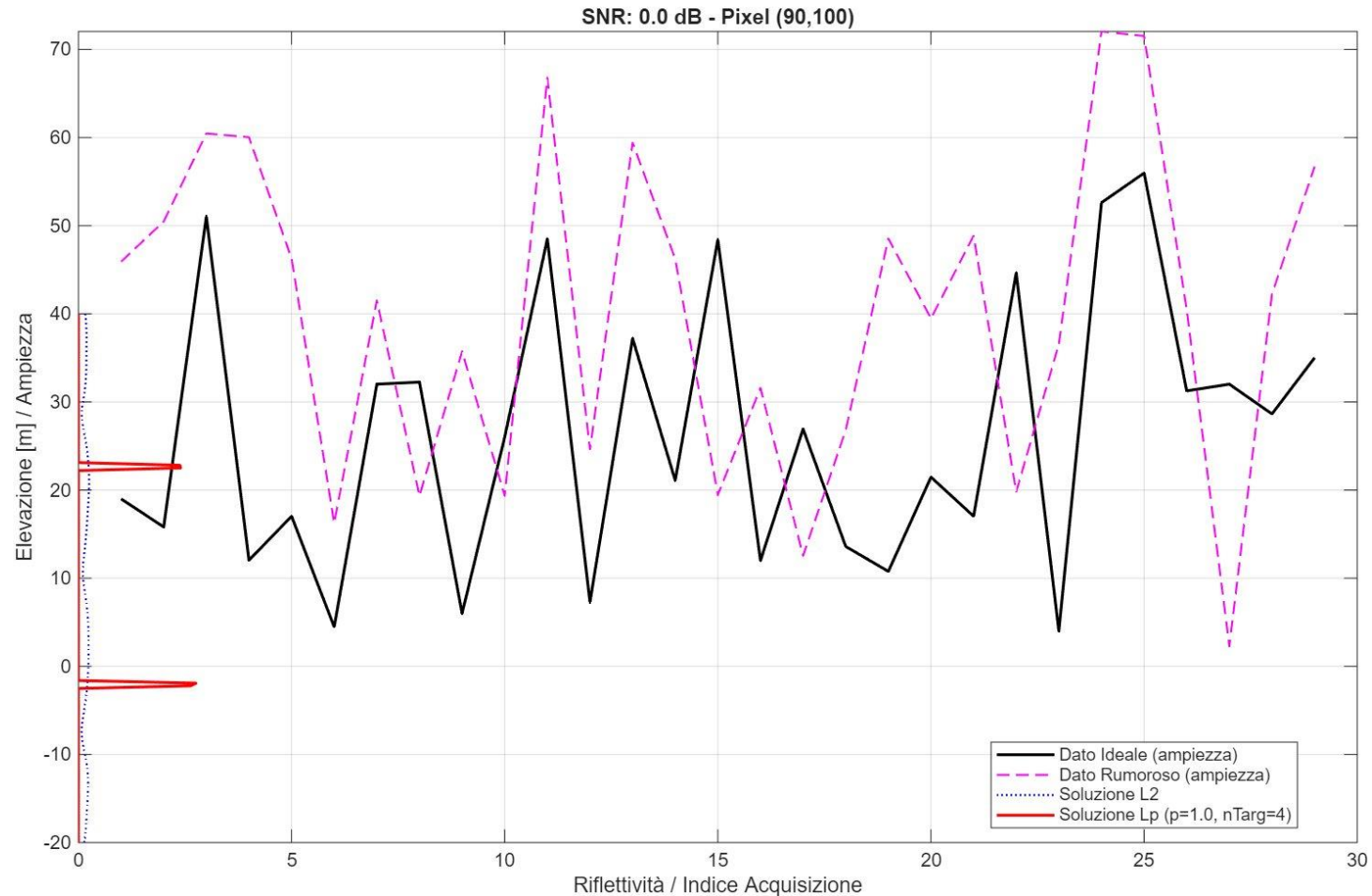
Valutazione dei risultati con aggiunta di rumore

Singolo pixel: -5 dB



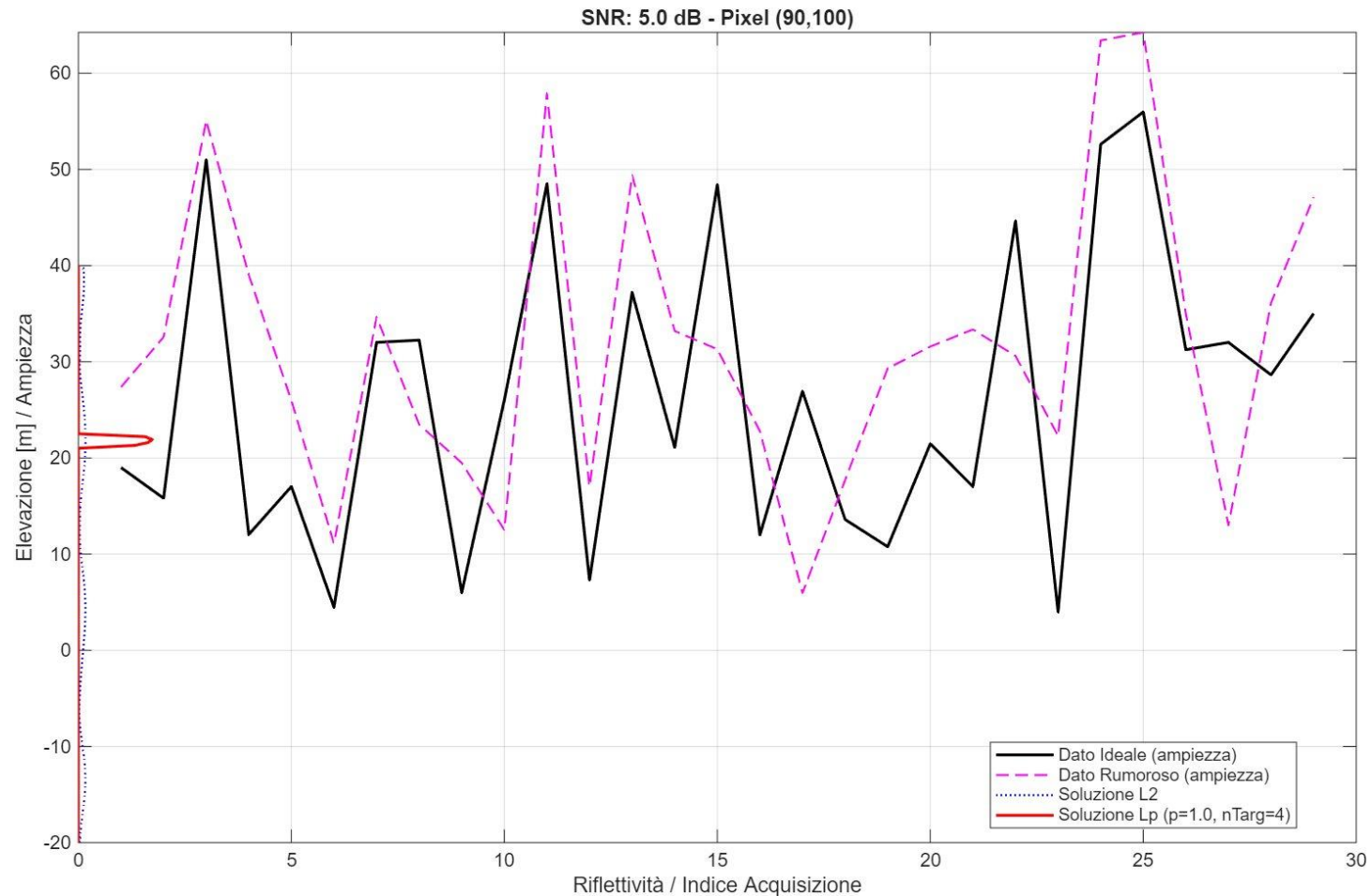
Valutazione dei risultati con aggiunta di rumore

Singolo pixel: 0 dB



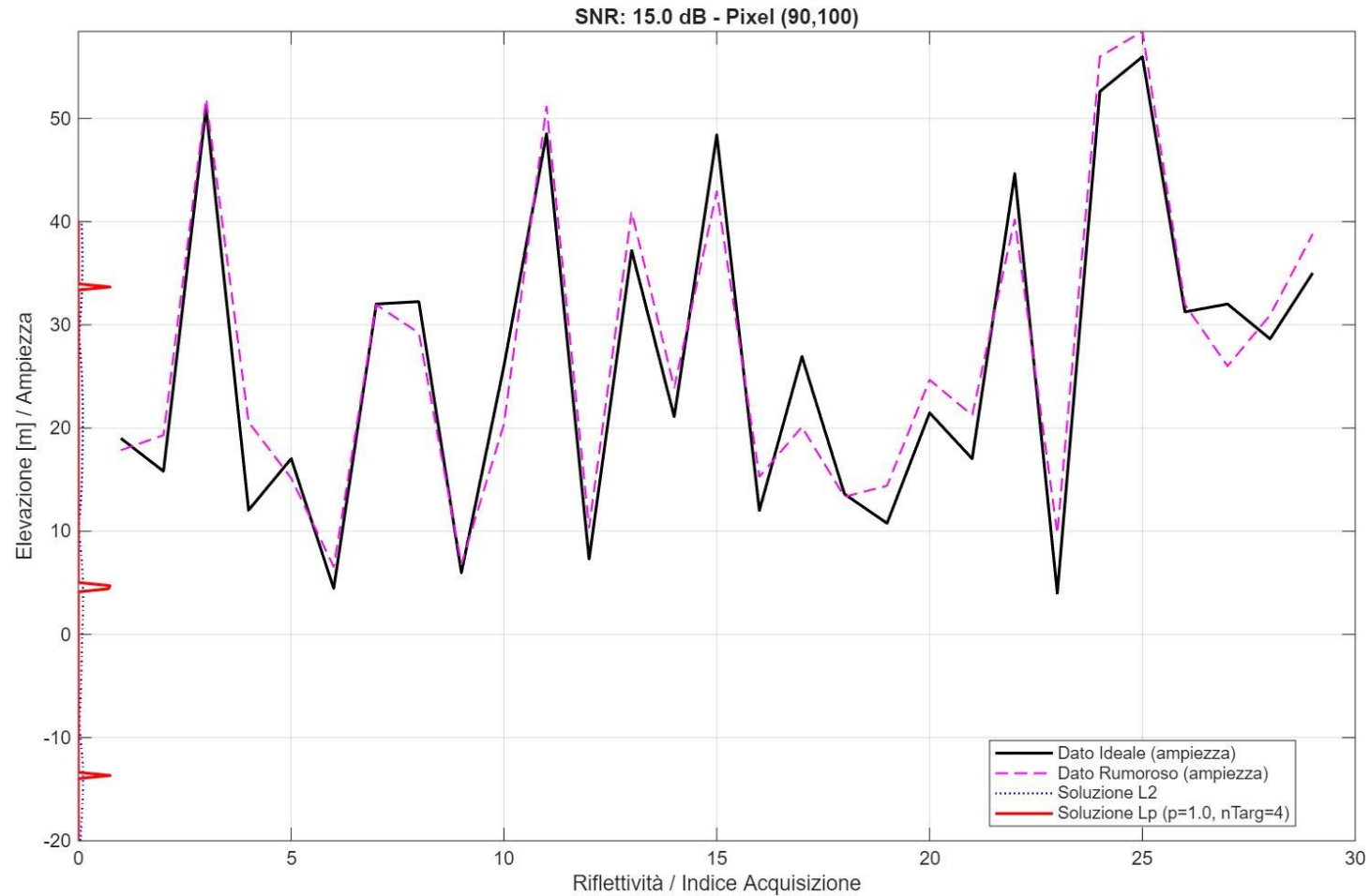
Valutazione dei risultati con aggiunta di rumore

Singolo pixel: +5 dB



Valutazione dei risultati con aggiunta di rumore

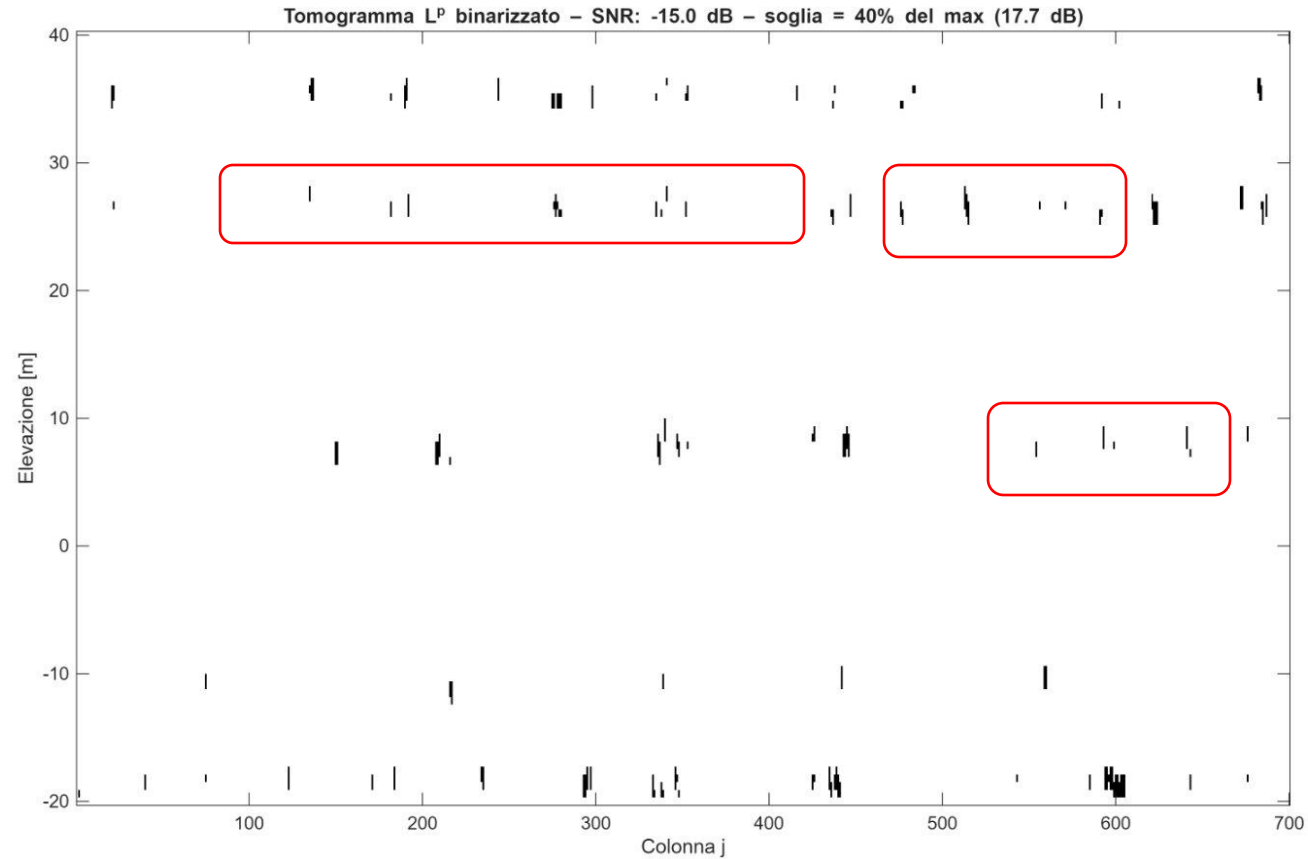
Singolo pixel: +15 dB



Valutazione dei risultati con aggiunta di rumore

Intera slice: -15 dB

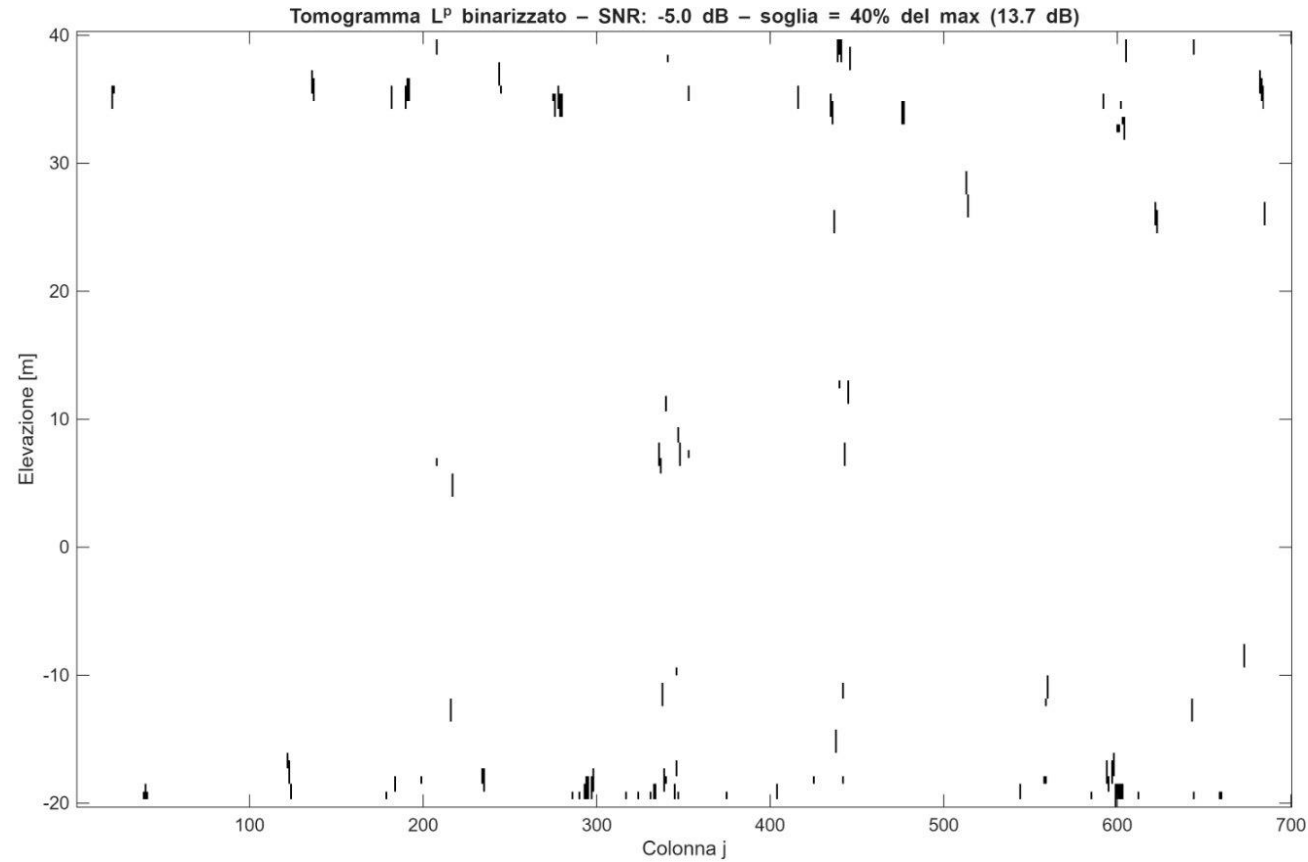
(binarizzato)



Valutazione dei risultati con aggiunta di rumore

Intera slice: -5 dB

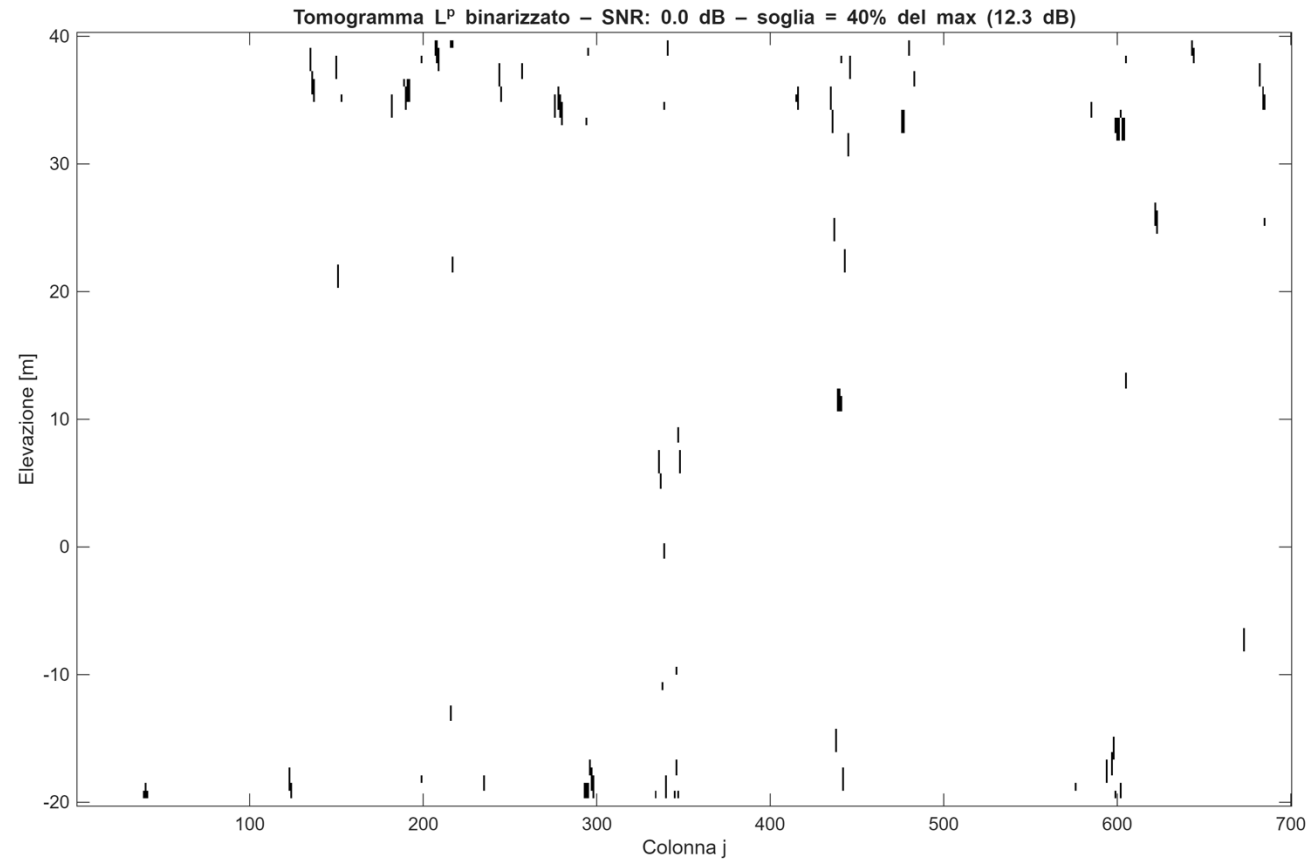
(binarizzato)



Valutazione dei risultati con aggiunta di rumore

Intera slice: 0 dB

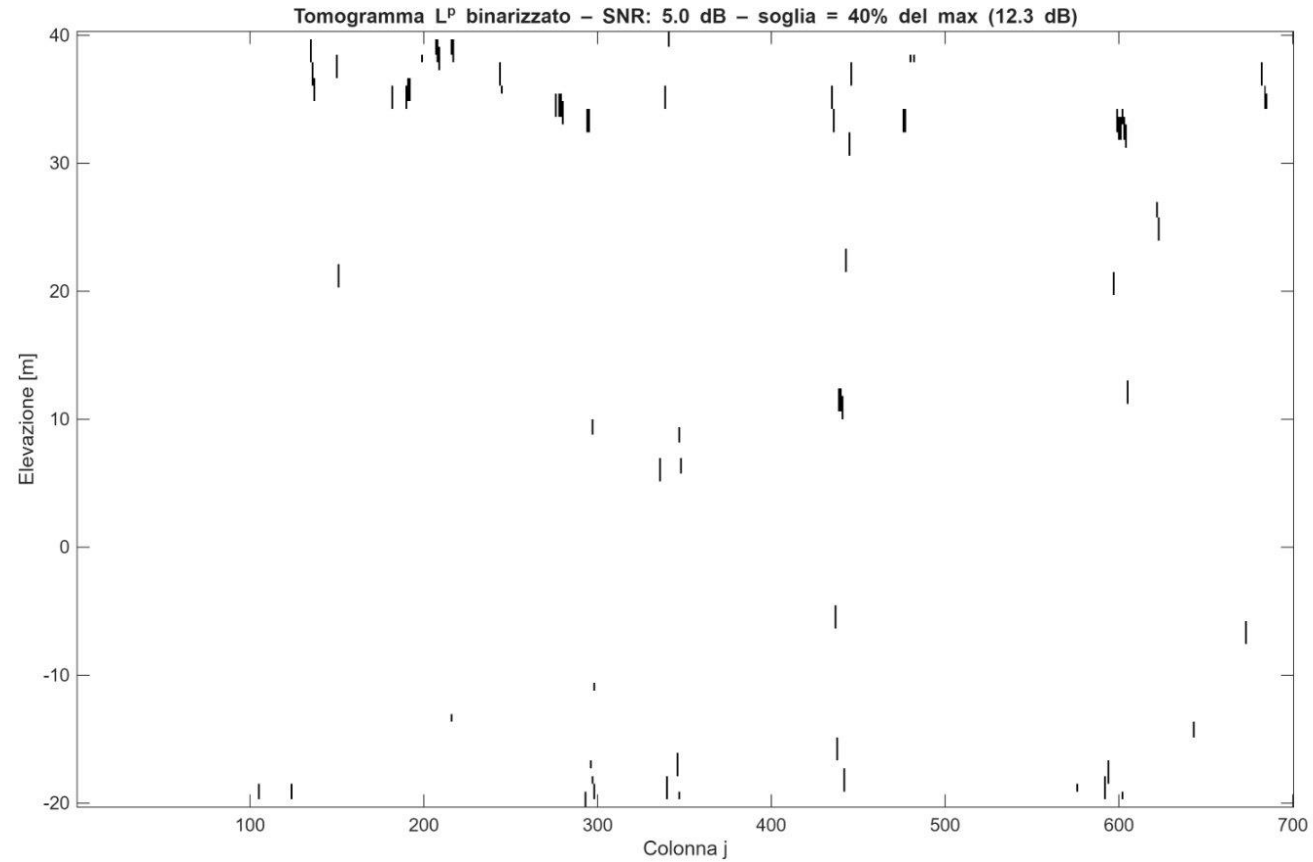
(binarizzato)



Valutazione dei risultati con aggiunta di rumore

Intera slice: +5 dB

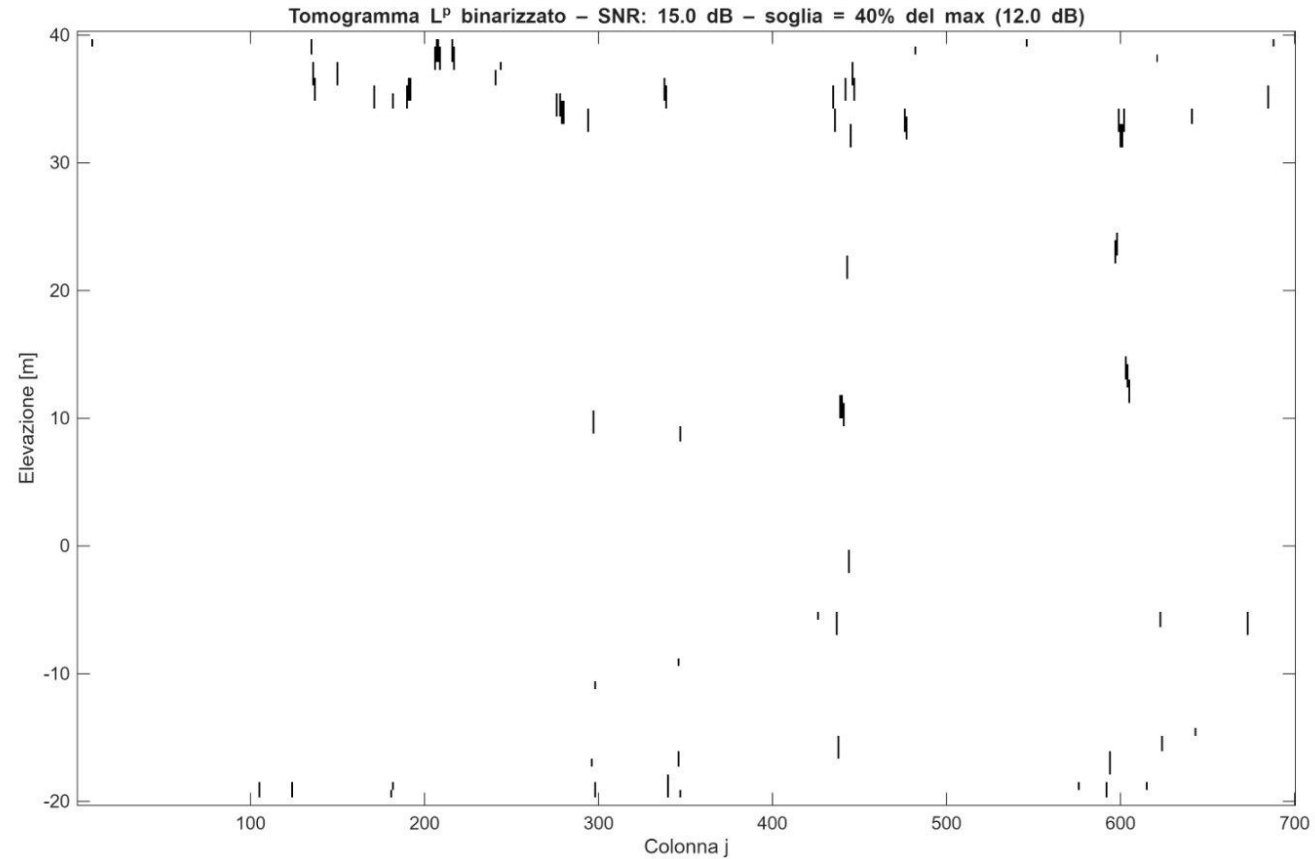
(binarizzato)



Valutazione dei risultati con aggiunta di rumore

Intera slice: +15 dB

(binarizzato)

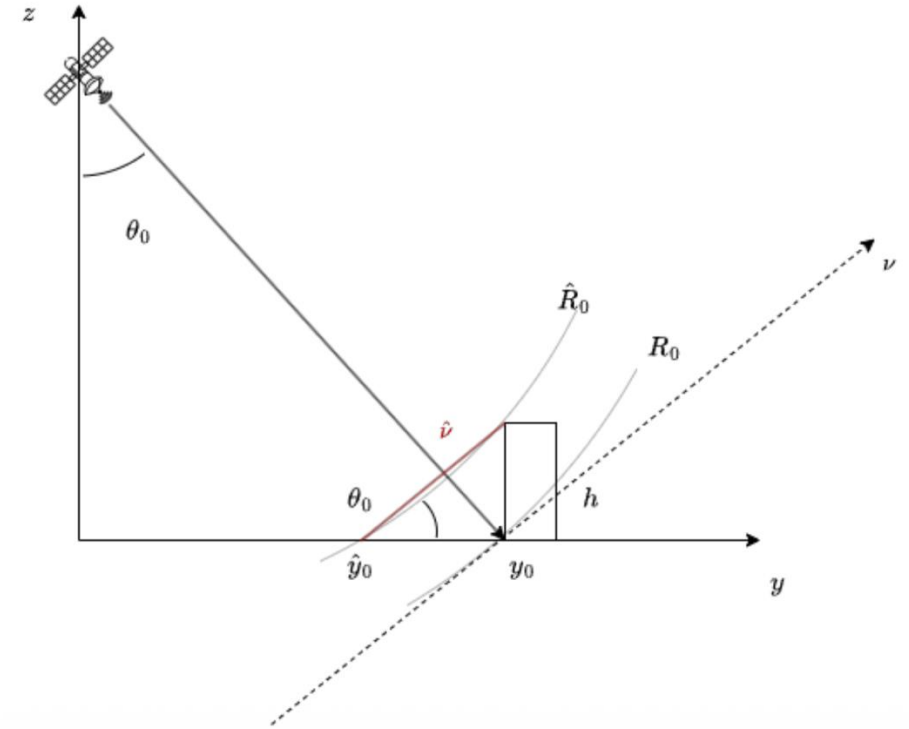


Dalla geometria SAR alla geometria reale

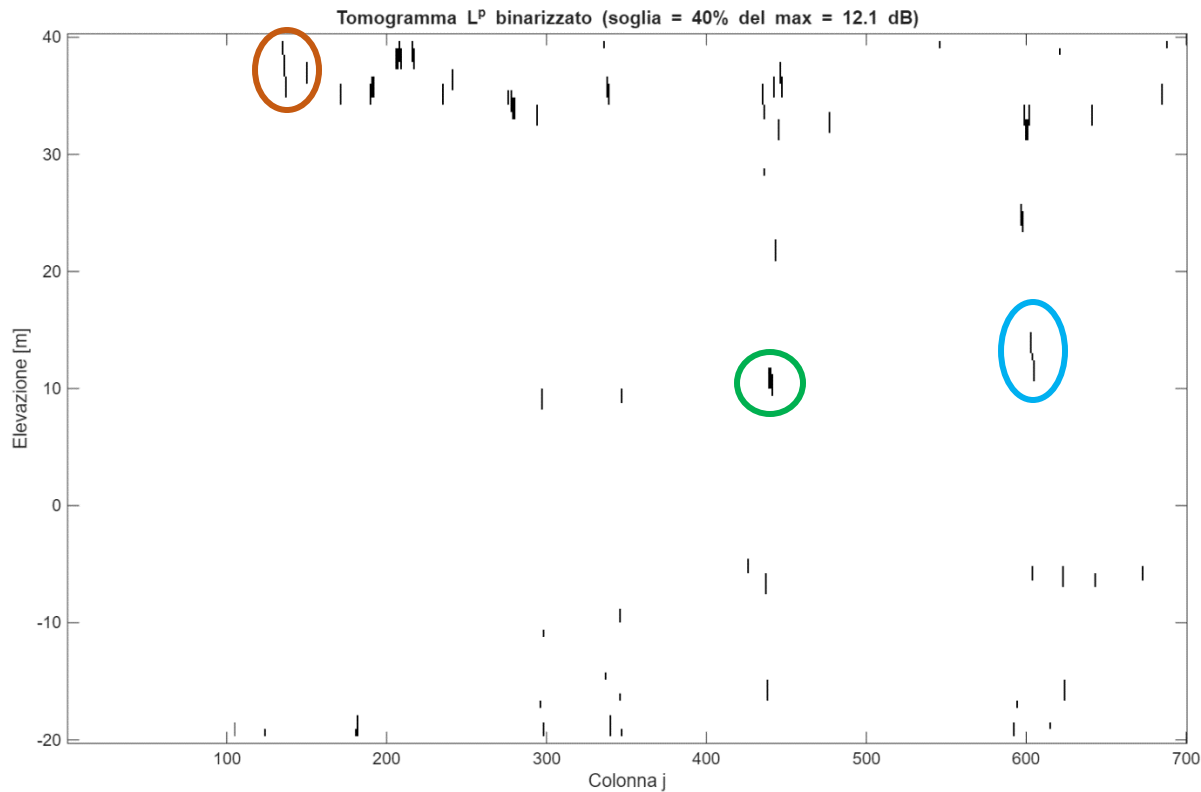
- Effetto dell'inclinazione del SAR su un generico punto acquisito:

$$\hat{y}_0 = y_0 - \frac{h}{\tan(\theta)}$$

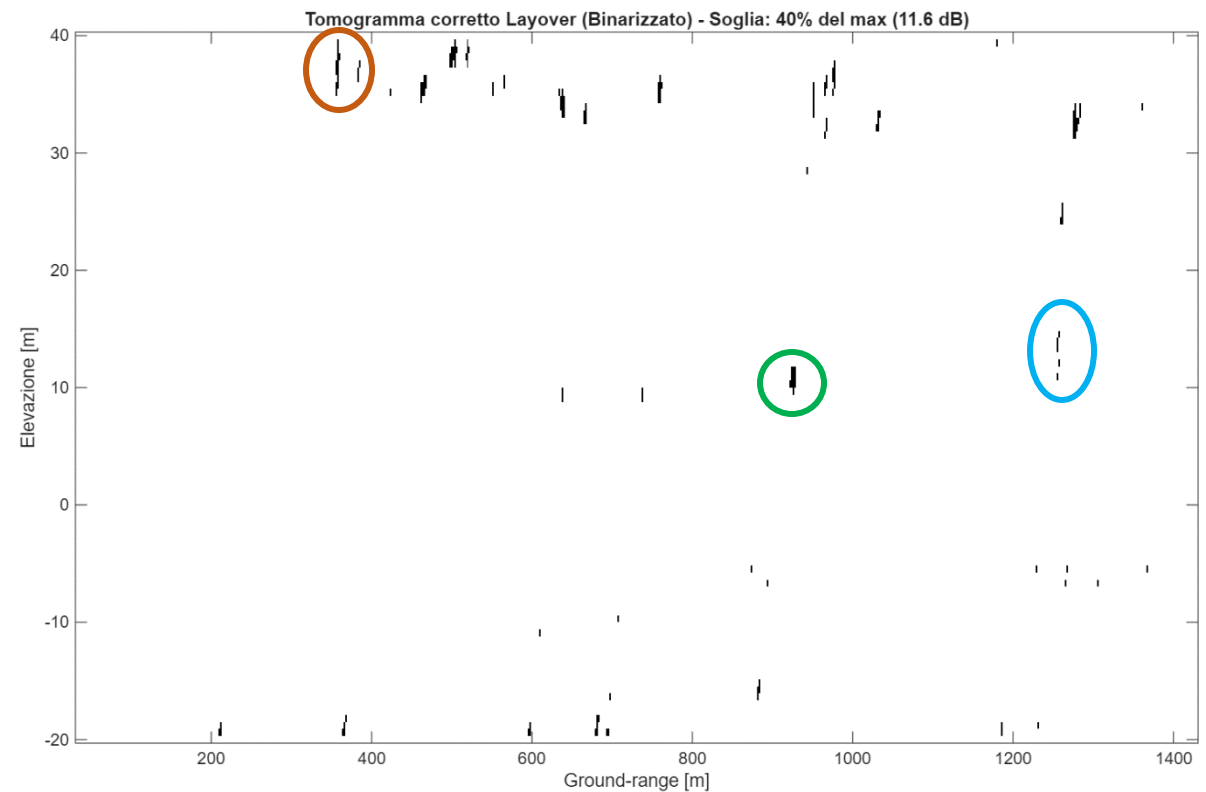
- Risoluzione (MATLAB):
 1. Ridefinizione asse Ground Range sulla base dell'inclinazione SAR;
 2. Generazione di una nuova griglia 2D con la variabile corretta.



Dalla geometria SAR alla geometria reale – confronto SLICE 2D (binarizzati)



SLICE 2D (non corretta)



SLICE 2D (corretta)